Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Wintersemester 2020/2021

Lineare Algebra I
Blatt 4
Abgabe: 07.12.2020, 10 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
Sei $\mathbb{R}[T]$ der Polynomring mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ (siehe Appendix D im Skript). Beachte, dass $\mathbb{R}[T]$ insbesondere ein reeller Vektorraum ist.

(a) Zeige, dass die Teilmenge U der Polynome vom Grad höchstens 2 ein Unterraum ist.

(b) Sind die Elemente $\{1+T, 2+T, 1+2T+T^2\}$ aus U linear unabhängig?

(c) Bilden diese Elemente eine Basis des Unterraumes U?

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Sei $\mathcal{S}$ die Kollektion aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Die Menge $\mathcal{S}$ ist partiell geordnet bezüglich Inklusion (siehe Appendix C im Skript).

(a) Gibt es eine obere Schranke für $\Gamma = \{\emptyset, \{5\}, \{2,5\}, \{1,3\}\}$ in $\mathcal{S}$? Gibt es eine einzige obere Schranke?

(b) Zeige, dass die Kollektion $\Gamma = \{\{0,1,\ldots,n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ linear geordnet ist. Besitzt Γ eine obere Schranke in $\mathcal{S}$?

(c) Gibt es maximale Elemente in $\mathcal{S}$?

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Gegeben $a < b$ in $\mathbb{R}$ sei $\mathcal{F}(a,b)$ die Menge der Abbildungen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$.

(a) Zeige, dass die Menge $\mathcal{F}(a,b)$ zusammen mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(b) Für eine Abbildung f aus $\mathcal{F}(0,1)$ ist die Einschränkung auf das Teilintervall $(0,\frac{1}{2})$ die Abbildung $f_{\restriction(0,\frac{1}{2})} : (0,\frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$ mit $f_{\restriction(0,\frac{1}{2})}(x) = f(x)$, für x aus $(0,\frac{1}{2})$.

Zeige, dass die Funktionen $f_1,\ldots,f_n$ aus $\mathcal{F}(0,1)$ linear unabhängig sein müssen, wenn ihre Einschränkungen auf das Teilintervall $(0,\frac{1}{2})$ linear unabhängig sind.

(c) Gilt die Rückrichtung?

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.**
Zeige, dass jedes maximale Element einer linear geordneten Menge $(\mathcal{S},<)$ das größte Element sein muss. Insbesondere gibt es höchstens ein maximales Element in $\mathcal{S}$.
Muss jede linear geordnete Menge $\mathcal{S}$ ein maximales Element besitzen?

Abgabe in ILIAS als eine einzige PDF-Datei einreichen.